فصل چهارم

امید ریاضی

۱-۴ با توجه به مطالب فصل اول می‌دانیم که اگر مقادیر $x_n \cdots x_1$ را از یک جامعه آماری داشته باشیم میانگین آنها را با $\bar{x}=\frac{\sum_{1}^{n} f_i x_i}{\sum_{1}^{n} f_i}$ نمایش می‌دهیم حال فرض کنید مقادیر $x_n \cdots x_1$ مقادیری باشند که متغیر تصادفی گسسته X با مقدار احتمال $f(xi)$ بخود می‌گیرد. در این صورت امید ریاضی متغیر تصادفی X را همان میانگین مقادیر $x_n \cdots x_1$ با فراوانی $f(xi)$ در نظر می‌گیریم و با $E[X]$ یا μ_x به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$E[X]=\sum_{x \text{ برد}} f(xi)\, x_i$$

توجه کنید که در این حالت $\sum_{x \text{ برد}} f_i = 1$ زیرا $f(xi)$ خود تابع احتمال متغیر تصادفی X می‌باشد. با توجه به مطالب فوق می‌توان نتیجه گرفت که امید ریاضی در واقع همان میانگین یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی X است یعنی اگر تحت شرایط یکسان یک آزمایش را با توجه به مقادیر احتمال متغیر تصادفی X تکرار کنیم انتظار داریم چه مقداری از متغیر تصادفی X را مشاهده کنیم. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید:

۲-۴ مثال ۸: یک شرکت بیمه انواع اتومبیل‌ها را بیمه بدنه می‌کند. فرض کنید در طول یک سال ۲۰ درصد افراد هیچگاه تصادف نکنند، ۳۰ درصد افراد تصادفاتی با مجموع هزینه ۱۰۰ هزار تومان برای بیمه، ۴۰ درصد افراد تصادفاتی با مجموع هزینه ۱ میلیون تومان برای بیمه و ۱۰ درصد افراد تصادفاتی با مجموع هزینه ۱۰ میلیون تومان برای بیمه داشته باشند. در این صورت انتظار داریم شرکت بیمه بطور متوسط در طول یک سال چه هزینه‌ای را برای بیمه بدنه اتومبیل‌ها پرداخت کند؟

حل: ابتدا متغیر تصادفی X را احتمال تصادف اتومبیل‌ها و مقادیر آنرا برابر با هزینه تقبل شده توسط شرکت بیمه در نظر می‌گیریم بنابر این داریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۰/۲ & x=x_1=۰ \\ ۰/۲ & x=x_2=۱۰۰/۰۰۰ \\ ۰/۴ & x=x_3=۱/۰۰۰/۰۰۰ \\ ۰/۱ & x=x_4=۱۰/۰۰۰/۰۰۰ \end{cases}$$

حال امید ریاضی متغیر تصادفی X را که برابر است با مقدار متوسط هزینه پرداخت شده توسط شرکت بیمه، محاسبه می‌کنیم:

$$E[X]=\sum_{1}^{۴} f(xi)\, x_i = ۰/۲\times۰+(۱۰۰/۰۰۰)\,۰/۳+(۱/۰۰۰/۰۰۰)\,۰/۴+(۱۰/۰۰۰/۰۰۰)\,۰/۱$$

$$=۳۰/۰۰۰+۴۰۰/۰۰۰+۱/۰۰۰/۰۰۰=۱/۴۳۰/۰۰۰$$

به این ترتیب شرکت بیمه می‌بایستی سالانه مبلغ ۱/۴۳۰/۰۰۰ تومان را به ازای بیمه بدنه اتومبیل‌ها پرداخت کند.

۳-۴ مثال ۹: فرض کنید در مثال قبل شرکت بیمه تعداد ۱۰۰ اتومبیل را بیمه بدنه کرده باشد در این صورت حداقل قیمت پیشنهادی شرکت برای هر اتومبیل چقدر باشد تا شرکت ضرر کند؟

حل: توجه کنید که با توجه به مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی X که در مثال قبل درست آمد می‌دانیم شرکت سالانه ۱/۴۳۰/۰۰۰ تومان هزینه می‌کند. با تقسیم این مبلغ بر تعداد اتومبیل‌ها میزان هزینه به ازای هر اتومبیل بدست می‌آید که برابر است با:

میزان هزینه سالانه هر اتومبیل $=۱۴/۳۰۰ \frac{۱/۴۳۰/۰۰۰}{۱۰۰}$

حال برای آنکه شرکت ضرر ندهد می‌بایستی به ازای بیمه بدنه هر اتومبیل حداقل مبلغ ۱۴/۳۰۰ تومان را دریافت کند.

۴-۴ برخی از خواص امیر ریاضی

از آنجا که امید ریاضی بر پایه میانگین $\overline{X}$ تعریف شده است خواص بدست آمده برای میانگین در مورد امید ریاضی نیز برقرار است که عبارتند از:

۱- $E[ax]=aE[X]$ مقدار ثابت A

۲- $E[x+b]=E[X]+b$ مقدار ثابت B

و در حالت کلی: $E[ax+b]=aE[X]+b$

۴-۵ امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی

تا بحال امید ریاضی را بر حسب متغیر تصادفی X محاسبه کردیم اما می‌توان آنرا بر حسب تابعی مثل $X^۲$، $۳X-۲$، محاسبه نمود به این ترتیب می‌توان طیف وسیعتری از مسائل را حل نمود. برای محاسبه امید ریاضی بر حسب تابعی مثل $g(X)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$E[g(x)]=\sum_{\text{برد } x} g(x)\, f_X(x)$$

به عنوان مثال $E[X]$ در واقع همان $E[g(x)=x]$ می‌باشد.

واریانس و انحراف معیار یک متغیر تصادفی X نیز با قرار دادن $g(X)=(X-\mu_x)^۲$ بدست می‌آید و داریم:

$$\delta_X^۲=E\left[(X-\mu_x)^۲\right]$$

و انحراف معیار متغیر تصادفی X با جذر از $\delta_X^۲$ بدست می‌آید $\delta_X=\sqrt{\delta_X^۲}$ می‌توان نشان داد که $\delta_X^۲$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\delta_X^۲=E\left[X^۲\right]-E^۲[X]$$

اثبات:

$$\delta_X^۲=E\left[(X-E[X])^۲\right]=E\left[X^۲-۲XE[X]+E^۲[X]\right]$$

$$=E\left[X^۲\right]-E[۲XE[X]]+E^۲[X]$$

$$=E\left[X^۲\right]-E[۲E[X]]E[X]+E^۲[X]$$

$$E\left[X^۲\right]-E^۲[X]$$

۴-۶ گشتاورها

اگر امید ریاضی را بر حسب تابع $g(X)=(X-a)^k$ محاسبه کنیم به آن گشتاور مرتبه kام حول a گویند به عبارتی:

گشتاور مرتبه kام حول a $=E[(X-a)^k]$

همچنین اگر $a=\overline{x}$ به آن گشتاور مرتبه kام مرکزی گویند و اگر $a=۰$ باشد به آن گشتاور مرتبه kام حول صفر گویند. که آنرا با m_k نمایش می‌دهند.

گشتاور مرتبه kام مرکزی $=E[(X-\overline{X})^k]$

$m_k=$ حول صفر $=$ گشتاور مرتبه kام $=E[(X^k]$

۴-۷ مثال ۱۰: مقادیر $m_۱$ و $m_۲$ را بر حسب μ_X و $\delta_X^۲$ بدست بیاورید:

حل:

$$m_1 = E\left[X^1\right] = \mu_X$$

$$m_2 = E\left[X^2\right] = \delta_X^2 + \mu_X^2$$

بنابراین با داشتن مقادیر گشتاورهای مرتبه اول و دوم می‌توان مقادیر امید ریاضی و واریانس را بدست آورد. همچنین با داشتن مقادیر سایر گشتاورهای مرتبه سوم به بعد نیز می‌توان اطلاعاتی در مورد متغیر تصادفی X بدست آورد.

۸-۴ تابع مولد گشتاورها

تابع مولد گشتاورها برای متغیر تصادفی X بصورت زیر تعریف می‌شود و با $m_X(t)$ نمایش داده می‌شود:

$$m_X(t) = E\left[e^{tx}\right]$$

$m_X(t)$ را به این دلیل تابع مولد گشتاورها می‌نامیم که با k بار مشتق گیری از آن نسبت به t و قرار دادن $t=0$ مقدار گشتاور مرتبه kام متغیر تصادفی X بدست می‌آید.

به عنوان مثال با یکبار مشتق گیری نسبت به t داریم: (با فرض اینکه بتوان ترتیب اعمال مشتق‌گیری و امیدگیری را جابجا نمود)

$$m_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} E\left[e^{tX}\right] = E\left[\frac{d}{dt} e^{tX}\right] = E\left[X e^{tX}\right]$$

با قرار دادن $t=0$ داریم:

$$m_X^{(1)}(0) = E\left[X e^{0X}\right] = E[X] = m_1$$

که همان گشتاور مرتبه اول یا μ_X می‌باشد. به همین ترتیب با K بار مشتق‌گیری داریم:

$$m_X^{(k)}(t) = E\left[\frac{d^k}{dt^k} e^{tX}\right] = E\left[X^k e^{tX}\right]$$

و در $t=0$ خواهیم داشت:

$$m_X^{(k)}(0) = E\left[X^k\right]$$

که همان گشتاور مرتبه kام متغیر X می‌باشد.

۹-۴ امید ریاضی برای متغیر تصادفی پیوسته

برای متغیر تصادفی پیوسته X امید ریاضی به جای جمع بستن روی مقادیر $x f_x(x)$ با انتگرال‌گیری روی این مقادیر بدست‌می‌آید بصورت زیر:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\, dx$$

همینطور داریم:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x)\, dx$$

به همین ترتیب برای محاسبه گشتاورها و توابع مولد برای متغیر تصافی پیوسته X از رابطه فوق در فرمول استفاده می‌شود.

۱۰-۴ مثال: فرض کنید برای متغیر تصادفی X مقدار تابع مولد گشتاور برابر با $m_X(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ باشد در این صورت مقدار گشتاور مرتبه kام حول مبدأ یا $E[X^K]$ را محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم مشتق مرتبه Kام تابع مولد گشتاور نسبت به t در نقطه صفر برابر با $E\left[X^K\right]$ می‌باشد بنابراین:

$$E\left[X^K\right] = \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)\Big|_{t=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{e^t - 1}{t}\right) = \frac{t e^t - e^t + 1}{t^2}$$

ملاحظه می‌کنید که مشتق مرتبه اول در نقطه $t=0$ موجود نمی‌باشد به همین ترتیب سایر مشتقات مراتب بالاتر نیز در نقطه $t=0$ موجود نمی‌باشند اما این به معنی عدم وجود $E[X^K]$ نمی‌باشد.

در مواقعی که مشتق در نقطه $t=0$ موجود نباشد می‌توان از قضیه زیر برای بدست آوردن گشتاور kام حول مبدأ استفاده کرد.

قضیه: گشتاور مرتبه kام متغیر تصادفی X حول مبدأ برابر است با ضریب $\frac{t^k}{k!}$ در بسط تیلور تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X:

$$m_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty} E\left[X^K\right]\frac{t^k}{k!}$$

حال با استفاده از قضیه فوق مجدداً مقدار $E[X^K]$ را در مثال قبل محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم: $e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$ بنابراین:

$$m_X(t)=\frac{e^t-1}{t}=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}-1}{t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{(k+1)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{k+1}}_{E\left[X^K\right]}\frac{t^k}{k!}$$

بنابراین ملاحظه می‌کنید که ضریب $\frac{t^k}{k!}$ در بسط فوق برابر $\frac{1}{k+1}$ می‌باشد یعنی: $E[X^K]=\frac{1}{1+k}$.

۴-۱۱ مثال: تابع مولد گشتاور متغیر تصافی X برابر است با $m_X(t)=\frac{1}{1-t}$ مطلوبست محاسبه μ_X، δ_X^2 و $E[X^K]$.

حل: در این مثال مقدار مشتق مرتبه Kام $\frac{1}{1-t}$ در نقطه $t=0$ موجود می‌باشد اما محاسبه آن مشکل می‌باشد بنابر این برای راحتی از بسط تیلور استفاده می‌کنیم:

$$m_X(t)=\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}k!\frac{t^k}{k!}$$

بنابراین $E[X^K]=k!$.

حال مقادیر μ_X و δ_X^2 برابرند با:

$$\mu_X=E[X]=1!=1$$

$$\delta_X^2=E\left[X^2\right]-E^2[X]=2!-1=1$$

۴-۱۲ مثال: متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر می‌باشد:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

مطلوبست :

الف) محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی X.

ب) محاسبه μ_X ، δ_X^2 و گشتاور مرتبه kام حول مبدأ و حول میانگین

حل: الف:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}\,dt = -e^{-\frac{1}{2}t} \Big|_{0}^{x} = -e^{-\frac{x}{2}} + 1$$

بنابراین:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ب) ابتدا تابع مولد گشتاور را محاسبه می‌کنیم:

$$m_X(t) = E\left[e^{tx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{x(t-\frac{1}{2})}\,dx$$

$$= \frac{1}{2(t-\frac{1}{2})} e^{x(t-\frac{1}{2})} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2(t-\frac{1}{2})} = \frac{1}{1-2t}$$

به شباهت بین تابع مولد گشتاور در ایم مثال و مثال قبل توجه کنید.

$$\mu_x = E[X] = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-2t}\right)\Big|_{t=0} = 2$$

$$\delta_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1-2t}\right)\Big|_{t=0} - 4 = 8-4=4$$

برای محاسبه گشتاور مرتبه kام حول میانگین داریم:

$E[(X-\mu_X)^K] =$ گشتاور مرتبه kام حول میانگین

برای محاسبه $E[(X-\mu_X)^K]$ از تابع مولد گشتاور حول میانگین که به صورت زیر تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم:

$$m_{X-\mu_X}(t) = E[e^{t(X-\mu_X)}]$$

حال توجه کنید که:

$$m_{X-\mu_X}(t) = E\left[e^{tX-t\mu_x}\right] = E\left[e^{tX} e^{-t\mu_x}\right] = e^{-t\mu_x} E\left[e^{tX}\right] = e^{-t\mu_x} m_X(t)$$

بنابراین رابطه کلی زیر بین گشتاور مرتبه kام حول مبدأ و میانگین موجود است:

$$m_{X-\mu_X}(t) = e^{-t\mu_x} m_X(t)$$

حال به راحتی می‌توان $m_{X-\mu_X}(t)$ را با توجه به مقدار $m_X(t)$ بدست آورد داریم:

$$m_{X-\mu_X}(t) = e^{-2t} \frac{1}{1-2t}$$

بنابراین مقدار گشتاور مرتبه kام حول میانگین برابر است با مشتق مرتبه kام $m_{X-\mu_X}(t)$ نسبت به t در نقطه $t=0$.

مقدار $E[X^K]$ برابر است با:

$$m_X(t) = \frac{1}{1-2t} = 1+2t+(2t)^2+(2t)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(2t)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k k!\left(\frac{t^k}{k!}\right) \quad \Rightarrow \quad E[X^K] = 2^K K!$$

۴-۱۳ مثال: تابع توزیع متغیر تصادفی X بصورت زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 \le x < 1 \\ -1+2x-\frac{1}{2}x^2 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

مطلوبست:

الف) تابع چگالی متغیر تصادفی X.

ب) μ_X و δ_X^2

حل: الف)

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{اگر} \quad x < 0 \quad f(x)=0$$

$$\text{اگر} \quad 0 \le x < 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2-x$$

$$x \ge 2 \quad \Rightarrow \quad f(x)=0$$

بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 2-x & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

ب)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 x(2-x)\, dx =$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4-\frac{8}{4}\right) - \left(1-\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^3\, dx + \int_1^2 x^2(2-x)\, dx =$$

$$\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{6}$$

$$\delta_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$